

Графическая логика Ч. С. Пирса – экзистенциальные графы

Diagrammatic reasoning is the only really fertile reasoning. If logicians would only embrace this method, we should no longer see attempts to base their science on the fragile foundations of metaphysics or a psychology not based on logical theory; and there would soon be such an advance in logic that every science would feel the benefit of it.

Ch. S. Peirce, Prolegomena to an Apology For Pragmatism, 1906

Иван Рыгаев

Лаборатория компьютерной лингвистики

Институт проблем передачи информации РАН

irygaev@gmail.com

Чарльз Сандерс Пирс

- Американский учёный, математик, логик, философ (1839 – 1914)
 - Сын Бенджамина Пирса – профессора математики в Гарварде
- Интересы:
 - Химия
 - Геодезия
 - Методология науки
 - Семиотика (наука о знаках)
 - Логика в широком и узком смысле
 - Каким образом мы приобретаем новые знания?



Чарльз Сандерс Пирс

- Основал философское направление прагматизма
 - Наше понимание объекта/концепта сводится к практическим эффектам от этого объекта/концепта
- Ввёл понятие абдукции
- Разработал научный метод
 - Абдукция – формулируем гипотезу
 - Дедукция – определяем её следствия
 - Индукция – тестируем следствия
- Основал семиотику (науку о знаках)
 - Иконы, индексы и символы



Чарльз Сандерс Пирс

- Логика в узком смысле:
 - Разработал синтаксис более десятка логических систем
 - Ввёл операцию импликации, стрелку Пирса и штрих Шеффера (на 40 лет раньше Шеффера)
 - Ввёл переменные и символы для кванторов (Σ и Π)
 - Разработал логику отношений (по сути предикатов) на два года раньше Фреге (1870)
 - Разработал полный синтаксис выражений с кванторами (1883), почти идентичный Расселу и Уайтхеду (1910).
 - Разработал две системы графической логики – entitative graphs и existential graphs

Экзистенциальные графы

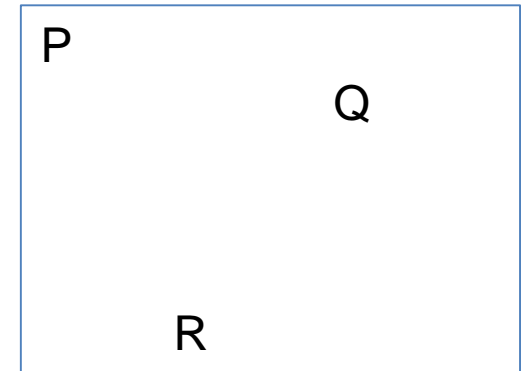
- Мотивация:
 - Разочарование в символьной логике:
 $P \wedge Q \wedge R$, $R \wedge Q \wedge P$, $\{P, Q, R\}$ – три разных ситуации
 - Впечатление от диаграмм Венна (кругов Эйлера) и попытка создать что-то похожее для логики отношений
 - Попытка сделать логическое представление наглядным и иконичным – интуитивно отражающим его смысл
- Пирс считал экзистенциальные графы вершиной своего научного творчества и полагал, что за ними будущее

Экзистенциальные графы

- Три системы:
 - Альфа – эквивалента логике высказываний
 - Бета – эквивалентна логике предикатов
 - Гамма – содержит элементы логики высших порядков и модальной логики (до конца не была разработана)
- Экзистенциальные графы были переоткрыты в середине XX века
 - Была доказана их эквивалентность системам классической логики

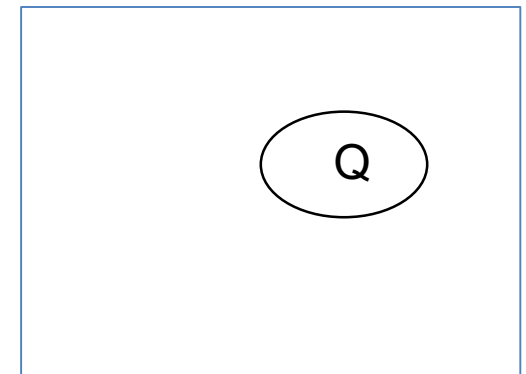
Экзистенциальные графы (альфа)

- *Элементарные высказывания* свободно располагаются на *листе утверждений*
- Аналог (обобщённой) конъюнкции
 - Порядок не имеет значения
- С точки зрения PL может означать:
 - Три утверждения P, Q и R
 - Одно утверждение $P \wedge Q \wedge R$
(или $Q \wedge R \wedge P$, или $R \wedge Q \wedge P$ и т. д.)
 - Два утверждения P и $Q \wedge R$
(или Q и $P \wedge R$, или R и $Q \wedge P$ и т. д.)



Экзистенциальные графы (альфа)

- *Круг или овал* вокруг высказывания означает, что это высказывание ложно, т. е. отрицание
 - Символизирует *вырез* из листа утверждения
- Итого инвентарь:
 - Лист утверждений
 - Элементарные высказывания
 - Конъюнкция – соположение
 - Отрицание – вырез
- Этого достаточно, чтобы выразить любое высказывание в логике высказываний



Символизация в графах альфа

- Перевод из PL в графы:

$P \longrightarrow$

P

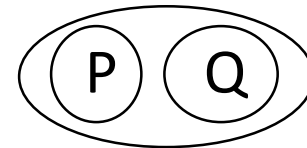
$\neg P \longrightarrow$



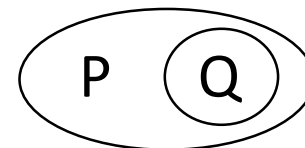
$P \wedge Q \longrightarrow$

$P \quad Q$

$P \vee Q \longrightarrow$

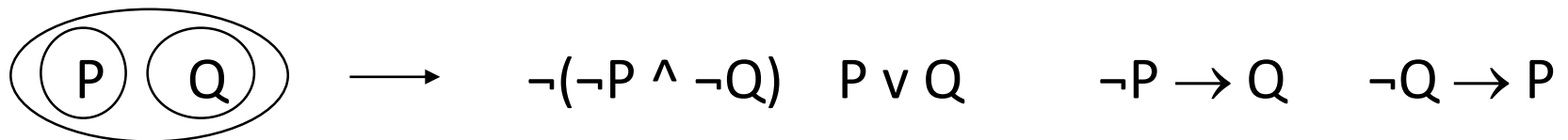
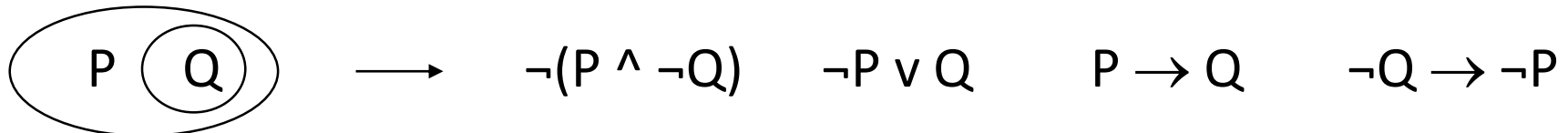
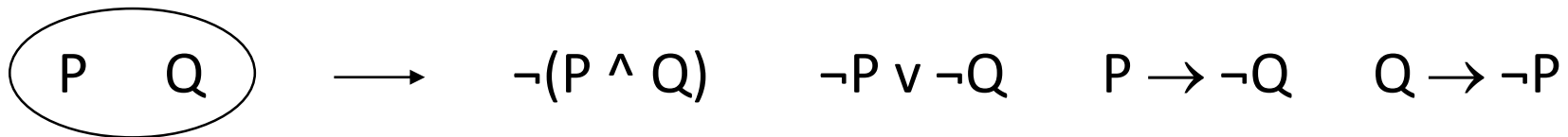


$P \rightarrow Q \longrightarrow$



Чтение графов альфа

- Перевод из графов в PL:



ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД

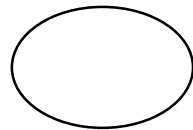
- 2 правила эквивалентности:
 - Вокруг любого подграфа можно нарисовать или стереть двойной вырез
 - Любой подграф можно скопировать на тот же уровень или на вложенный уровень и наоборот – копию на том же или вложенном уровне можно стереть
- 2 правила логического вывода:
 - На чётном уровне вложенности можно стереть любой подграф – обобщение
 - На нечётном уровне вложенности можно добавить любой подграф – специализация

Связанные понятия

- Подграф:
 - Любая часть графа, в которой вырезы сохраняют всё своё содержимое
- Двойной вырез:
 - Два вложенных выреза, между которыми ничего нет
- Уровень вложенности подграфа:
 - Количество вырезов вокруг него
- Вложенный уровень:
 - Уровень, на который можно «пройти», не выходя наружу вырезов

Особые графы

- Пустой граф:
 - Самая общая истина – константа True
 - Единственная аксиома экзистенциальных графов
- Пустой вырез:
 - Константа False, символизирует противоречие



Доказательства

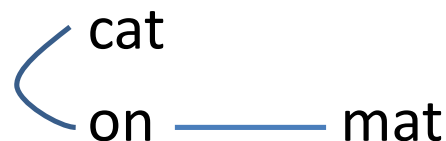
- Динамическая трансформация графов – видео
- Доказать валидность аргумента ($P \rightarrow Q$):
 - Преобразовать граф посылок в граф заключения
- Доказать эквивалентность двух графов:
 - Преобразовать один граф в другой, а затем – наоборот
- Доказать наличие противоречия:
 - Преобразовать исходный граф к пустому вырезу
- Доказать, что граф – тавтология:
 - Преобразовать пустой граф в граф тавтологии

Эффективность

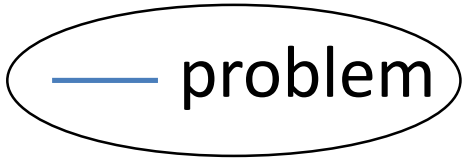

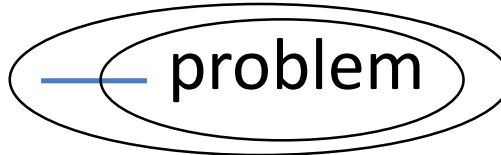
- В традиционных системах логики:
 - Больше правил вывода → короче доказательства
 - Меньше правил вывода → длиннее доказательства
- В экзистенциальных графах:
 - Всего 4 правила вывода
 - Доказательства обычно короче, чем в обычной логике
- Единое представление эквивалентных формул:
 - Один граф может быть прочитан по-разному
- Логический вывод в ЭГ, вероятно, легче, чем в PL

Экзистенциальные графы (бета)

- *Линии тождества:*
 - Обозначают объекты
 - Соответствуют квантору существования
- *Предикаты:*
 - Обозначают свойства объектов или отношения между ними
- *A cat is on a mat* $\exists x, y (\text{cat}(x) \wedge \text{mat}(y) \wedge \text{on}(x, y))$

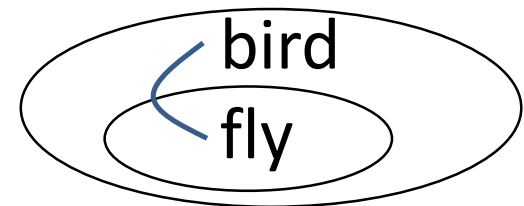
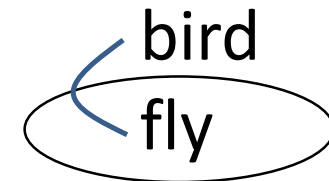
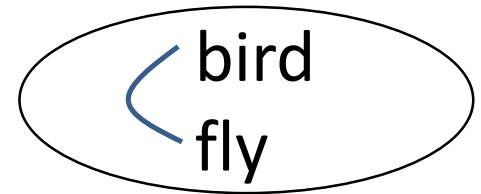
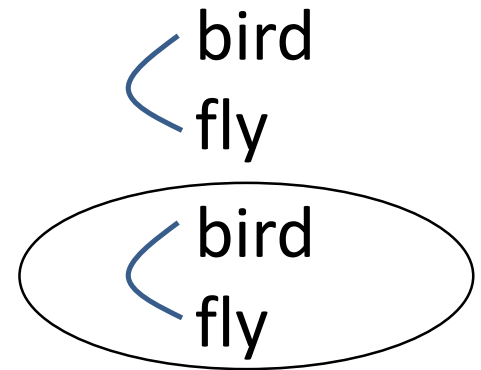


Экзистенциальные графы (бета)

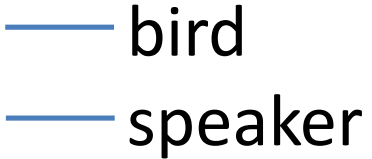

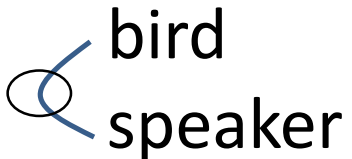
- Существует проблема — problem
- Не существует проблемы 
- Существует не проблема 
- Не существует не проблемы (Всё является проблемой) 

Экзистенциальные графы (бета)

- Некоторые птицы летают
- Никакие птицы не летают
(Если птица, то не летает)
- Некоторые птицы не летают
- Все птицы летают
(Если птица, то летает)

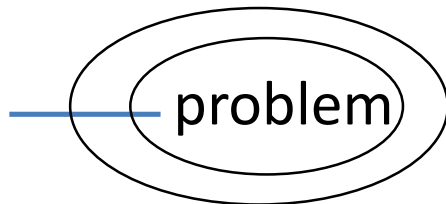


Тождество и различие

- Существует птица и говорун
(тот же объект или разные)  bird
speaker
- Существует птица-говорун
(один и тот же объект)  bird
speaker
- Существует птица и отдельно –
существует говорун
(разные объекты)  bird
speaker

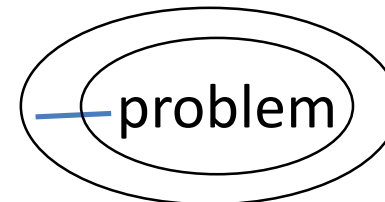
ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД (бета)

- Используются те же 4 правила вывода
 - Но надо учесть, как они взаимодействуют с линиями
- Двойной вырез
 - Игнорируйте линии, проходящие оба выреза насквозь
 - Но не начинающиеся между вырезами



Двойной вырез:

Существует не проблема

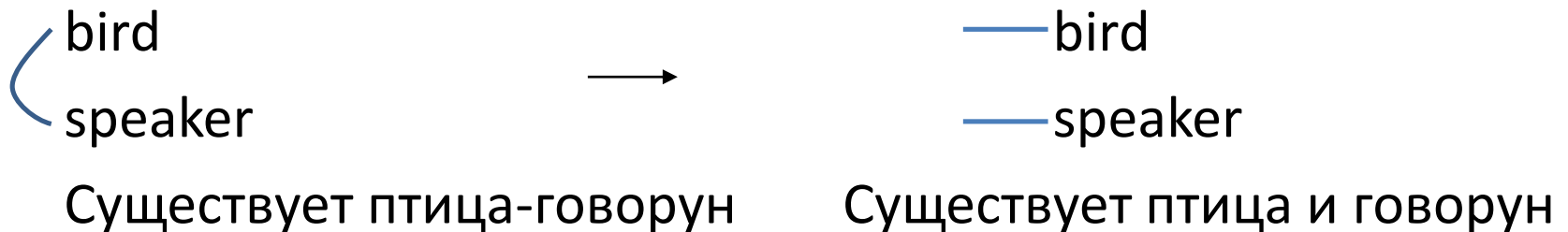


НЕ двойной вырез:

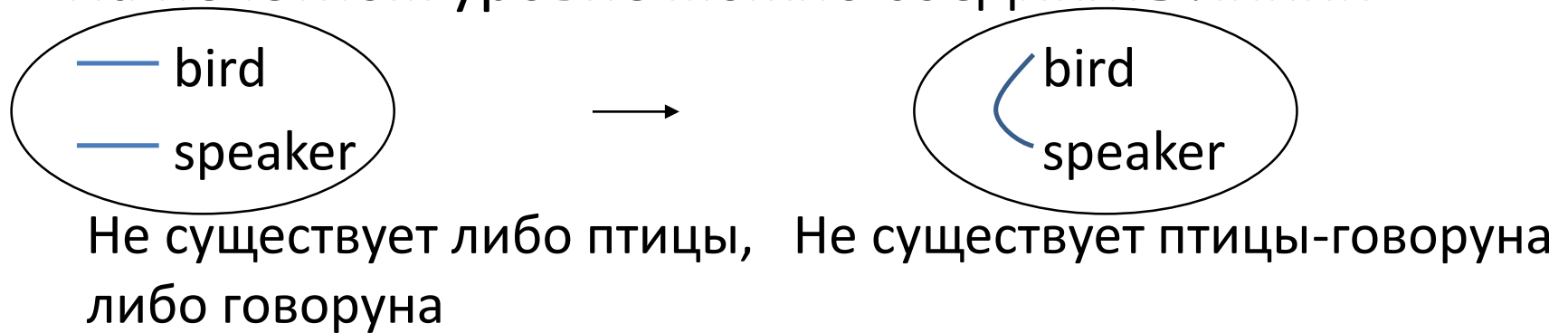
Всё – проблема

ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД (БЕТА)

- На чётном уровне можно разрывать линии



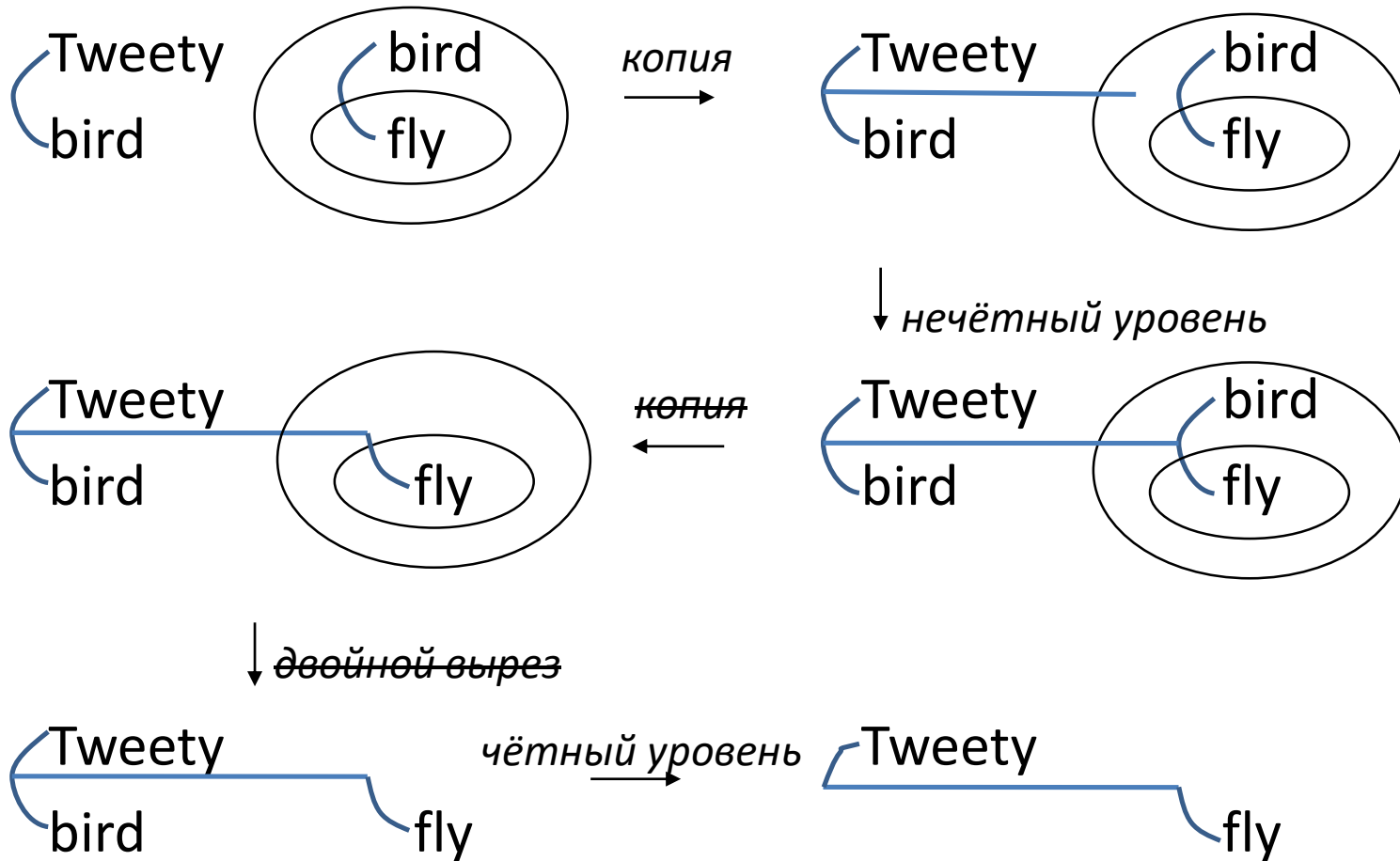
- На нечётном уровне можно соединять линии



ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД (БЕТА)

- Копирование:
 - Линии можно продолжать и ветвить, в том числе во вложенные уровни
 - Свободный конец линии можно стереть, а также утянуть вверх с вложенного уровня
 - При копировании предиката, его можно соединить линиями с исходным предикатом
 - Циклическую линию можно разорвать на самом глубоком уровне

Пример вывода



Спасибо за внимание!
Вопросы?

Иван Рыгаев
irygaev@gmail.com